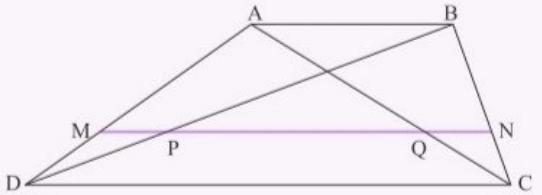
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۸ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ در ذوزنقهٔ زیر، MN با قاعده‌ها موازی است و $\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$. ثابت کنید:



الف

$$MN = \frac{m.DC + n.AB}{m+n}$$

ب

$$PQ = \frac{m.DC - n.AB}{m+n}$$

۲ ثابت کنید اگر $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$، آنگاه:

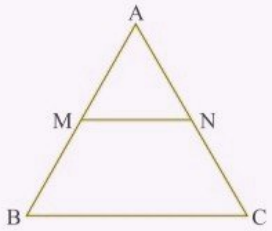
$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}$$ (همهٔ مقادیر، مثبت‌اند)

۳ موارد زیر را ثابت کنید.

الف اگر وتر و یک ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با همین اجزا از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث، متشابه‌اند.

ب اگر یک ضلع قائمه و میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با همین اجزا از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث، متشابه‌اند.

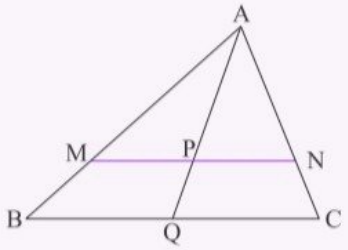
۴ در شکل زیر $BC \parallel MN$ و مساحت ذوزنقهٔ $MNCB$ پانزده برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



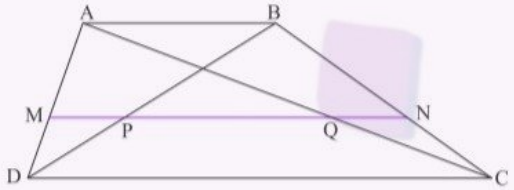
۵ ذوزنقه را با معلومات دو قاعده و دو قطر آن، رسم کنید.

۶ طول قاعده‌ها و ارتفاع یک ذوزنقه، به ترتیب ۶، ۱۰ و ۸ واحد است. قطرهای ذوزنقه را رسم می‌کنیم. مساحت هر یک از چهار مثلث داخل ذوزنقه را بیابید.

۷ در شکل زیر، $MN \parallel BC$، $\frac{AM}{MB} = \frac{۵}{۲}$ و $\frac{BQ}{QC} = \frac{۳}{۲}$. مساحت هریک از چهار ناحیهٔ داخل مثلث ABC را برحسب مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ بیابید.



۸ در ذوزنقهٔ زیر، $MN \parallel DC$، $DC = ۲AB = ۸$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{۳}{۲}$. طول PQ را بیابید.

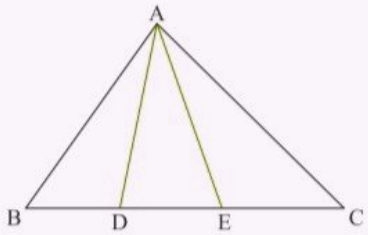


۹ عکس قضیهٔ داده‌شده را بنوسید و سپس آن را به‌صورت دوشرطی بنویسید.

در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰ در شکل زیر مساحت مثلث ACE چهار برابر مساحت مثلث ADE و سه برابر مساحت مثلث ABD است، نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



۱۱ مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول وتر آن $۴\ cm$ و طول یک ضلع زاویه قائمه آن $۲\ cm$ باشد. (شکل و توضیح)

۱۲ در مثلث ABC ثابت کنید اگر $\hat{A} = ۲\hat{B}$، آنگاه $a^۲ = b(b+c)$.

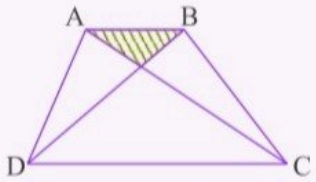
۱۳ فقط با استفاده از پرگار و خط‌کش، زاویه‌ای 45° رسم کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

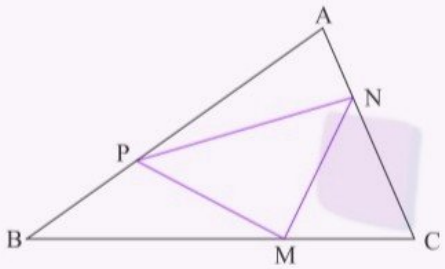
۱۴ قطرهای یک ذوزنقه را رسم می‌کنیم. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه ۱ به ۲ باشد، نسبت مساحت هر یک از چهار مثلث داخل ذوزنقه به مساحت ذوزنقه را بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

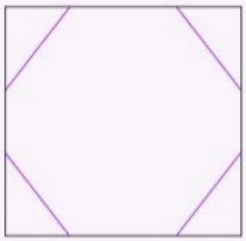
۱۵ در ذوزنقهٔ زیر، قاعدهٔ بزرگ سه برابر قاعدهٔ کوچک است. مساحت کل ذوزنقه چندبرابر مساحت مثلث هاشورخورده است؟



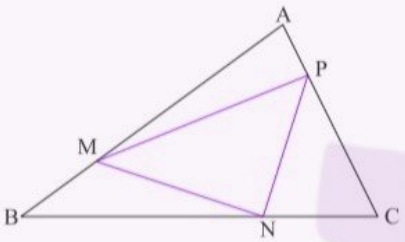
۱۶ در شکل زیر اگر $\frac{AP}{PB} = \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = ۳$، حاصل $\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$ را بیابید.



۱۷ در شکل زیر، یک هشت ضلعی منتظم درون مربع به ضلع ۴ واحد محاط شده است. طول ضلع هشت ضلعی را بیابید.



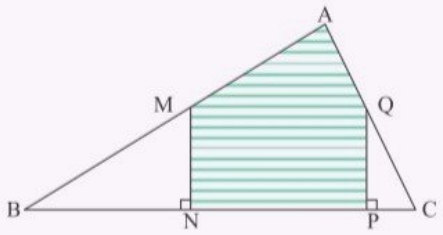
۱۸ در شکل زیر، $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = ۳$. نسبت مساحت مثلث MNP به مثلث ABC را بیابید.



۱۹ در مثلث ABC، نیمساز AD را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ و طول BD و DC را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۰ در شکل زیر، نقاط M و Q وسط‌های AB و AC است. مساحت ناحیهٔ رنگی، چه کسری از مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است؟



۲۱ نقاط M و N وسط‌های اضلاع AB و AC از مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث AMN به چهار ضلعی MNCB را بیابید.

۲۲ در مثلث ABC که $AB > AC$، از نقطهٔ D واقع بر BC دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در B' و C' قطع کنند. ثابت کنید:

$$AC < DB' + DC' < AB$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۳ اگر $\frac{x}{a^۲} = \frac{y}{b^۲} = \frac{z}{c^۲}$، ثابت کنید:

$$\frac{x+y+z}{a^۲+b^۲+c^۲} = \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{a+b+c}$$

۲۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، داریم $\hat{B} = ۳\hat{C}$ و $BC = ۲$. طول AB را بیابید.

۲۵ ثابت کنید اگر دو ضلع و میانهٔ بین آن‌ها از مثلثی، با همین اجزا از مثلث دیگری، نظیر به نظیر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

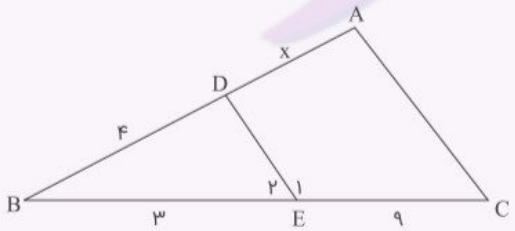
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۶ نیمساز خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC، امتداد BC را در D' قطع کرده است. ثابت کنید $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$ و طول $D'B$ و $D'C$ را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

۲۷ اگر $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$، ثابت کنید: $\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{ab + bc + cd} = \frac{ab + bc + cd}{b^۲ + c^۲ + d^۲}$

۲۸ اگر $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ و مقدار کسرها مثبت باشد، ثابت کنید مقدار هریک از کسرها برابر $\frac{\sqrt{x^۲ + a^۲p^۲}}{\sqrt{y^۲ + b^۲p^۲}}$ است.

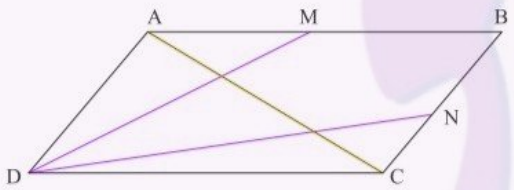
۲۹ در شکل زیر دو زاویهٔ مقابل چهار ضلعی مکمل‌اند. اندازهٔ x را بیابید.



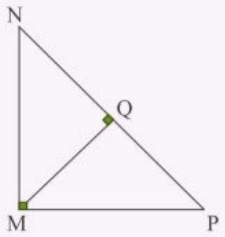
۳۰ نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند است؟ نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر را به دست آورید.

۳۱ از نقطهٔ O درون مثلث ABC به مساحت S، سه خط به موازات اضلاع مثلث رسم کرده و مساحت مثلث‌های ایجاد شده را $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ می‌نامیم. ثابت کنید: $S = \left(\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳}\right)^۲$

۳۲ در متوازی‌الاضلاع زیر، نقاط M و N وسط‌های AB و BC است. ثابت کنید DM و DN، قطر AC را به سه پاره‌خط مساوی، تقسیم کرده‌اند.



۳۳ ثابت کنید: $MQ^۲ = NQ \times QP$



۳۴ در مثلث ABC از A عمودهای AM و AN را بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

الف MN با BC موازی است.

ب MN از وسط AB و AC می‌گذرد.

پ طول MN نصف محیط مثلث ABC است.

۳۵ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۴ و ۱۲ و ارتفاع ۱۵ واحد، فاصلهٔ محل برخورد قطرها از محل برخورد امتدادهای ساق‌ها را بیابید.

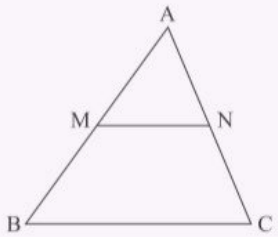
۳۶ طول قاعده‌های یک ذوزنقه، ۴ و ۱۲ واحد و طول پاره‌خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند، ۶ واحد است. فاصلهٔ محل برخورد قطرها از وسط قاعدهٔ بزرگ‌تر را بیابید.

۳۷ نقطهٔ دلخواه M روی نیمساز خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC انتخاب شده است. ثابت کنید محیط مثلث ABC از محیط مثلث MBC کمتر است.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۸ اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$، مقدار عددی $\frac{۲a + ۳b + ۴c}{۵a - ۴b + ۳c}$ را بیابید.

۳۹ در شکل زیر $BC||MN$ و مساحت ذوزنقه $MNCB$ پانزده برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

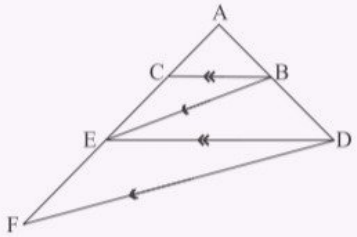


۴۰ از نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y = ۱۲۰^\circ$ خطی عبور می‌دهیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند. ثابت کنید:

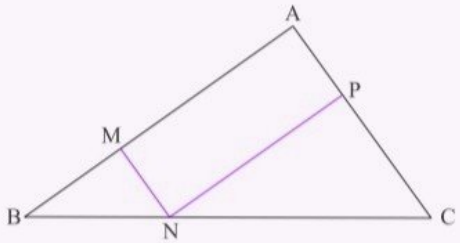
$$\frac{۱}{OA} = \frac{۱}{OB} + \frac{۱}{OC}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

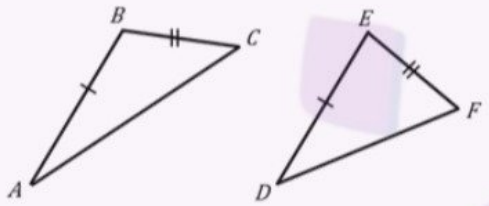
۴۱ در شکل زیر ثابت کنید: $AE^{۲} = AC \times AF$



۴۲ در شکل زیر چهار ضلعی $AMNP$ مستطیل است. ثابت کنید: $S_{AMNP} = MB.PC$



۴۳ ثابت کنید اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویه بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگ‌تر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.



۴۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نتیجه بگیرید که "سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند".

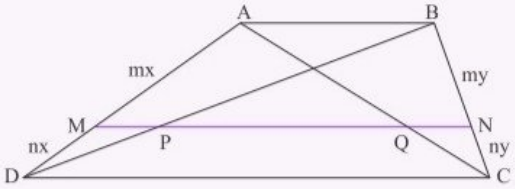
۴۵ ثابت کنید در هر ذوزنقه، محل برخورد قطرها، وسط‌های دو قاعده و محل برخورد امتدادهای دو ساق، روی یک خط قرار دارند.

۴۶ نقطهٔ A درون زاویهٔ xOy قرار دارد و رأس زاویه، در دسترس نیست. خطی گذرنده از A رسم کنید که بدانیم از رأس زاویه هم خواهد گذشت. ($x\hat{O}y \leq ۹۰^\circ$)

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ **الف** فرض کنیم $AM = mx$ و $MD = nx$، حال داریم:



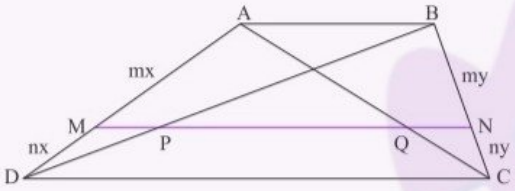
$$MN \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MD} = \frac{m}{n} \Rightarrow BN = my\,,\ NC = ny$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : MQ \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m.DC}{m+n}\ (*)$$

$$\overset{\Delta}{CBA} : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow QN = \frac{n.AB}{m+n}\ (**)$$

$$MN = MQ + QN \xrightarrow{(*),(**)} MN = \frac{m.DC + n.AB}{m+n}$$

ب ابتدا همانند قسمت (الف)، طول پاره‌خط‌های تشکیل‌شده روی ساق‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم:



حال داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC} : MQ \parallel DC \Rightarrow \frac{MQ}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow MQ = \frac{m.DC}{m+n}\ (*)$$

$$\overset{\Delta}{DAB} : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow MP = \frac{n.AB}{m+n}\ (**)$$

$$PQ = MQ - MP \xrightarrow{(*),(**)} PQ = \frac{m.DC - n.AB}{m+n}$$

۲ مقدار همهٔ کسرها را k فرض می‌کنیم؛ بنابراین:

$$A = ka\,,\ B = kb\,,\ C = kc\,,\ D = kd$$
$$\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)} = \sqrt{(ka+kb+kc+kd)(a+b+c+d)}$$
$$= \sqrt{k(a+b+c+d)^{۲}} = (a+b+c+d)\sqrt{k} = a\sqrt{k} + b\sqrt{k} + c\sqrt{k} + d\sqrt{k}$$
$$= \sqrt{ka^{۲}} + \sqrt{kb^{۲}} + \sqrt{kc^{۲}} + \sqrt{kd^{۲}} = \sqrt{(ka)a} + \sqrt{(kb)b} + \sqrt{(kc)c} + \sqrt{(kd)d}$$
$$= \sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd}$$

۳ **الف** دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ و $A'B'C'$ $(\hat{A}' = ۹۰^\circ)$ را در نظر گرفته و اضلاع $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را a'، b' و c' می‌نامیم. فرض کنیم $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. حال داریم:

$$\frac{a^{۲}}{a'^{۲}} = \frac{b^{۲}}{b'^{۲}} \xrightarrow[a'^{۲}=b'^{۲}+c'^{۲}]{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}} \frac{b^{۲}+c^{۲}}{b'^{۲}+c'^{۲}} = \frac{b^{۲}}{b'^{۲}} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{ویژگی‌های}} \frac{b^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{b'^{۲}+c'^{۲}-b'^{۲}} = \frac{b^{۲}}{b'^{۲}}$$
$$\Rightarrow \frac{c^{۲}}{c'^{۲}} = \frac{b^{۲}}{b'^{۲}} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تذکر: به کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های حادهٔ دو مثلث هم می‌توانستیم درستی حکم را اثبات کنیم.

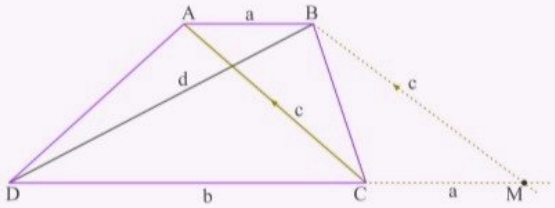
ب می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس نسبت میانه‌های وارد بر وتر این دو مثلث، همان نسبت وترهای آن‌ها است و طبق قسمت اول، دو مثلث، متشابه‌اند.

۴

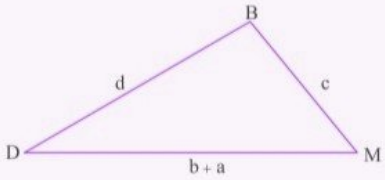
$$BC \parallel MN \Rightarrow AMN \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲}$$
$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNCB} + S_{AMN}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{۱۵S_{(AMN)} + S_{(AMN)}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲}$$
$$\left(\frac{MA}{AB}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{MA}{AB - MA} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = ۳$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

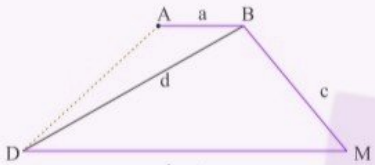
۵ در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ فرض کنیم طول قاعده‌ها و قطرها معلوم است. از B خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد DC را در M قطع کند. پس چهار ضلعی $ABMC$ متوازی‌الاضلاع است و $BM = AC$. درنتیجه طول سه ضلع مثلث BMD معلوم و روش رسم، به صورت زیر است:



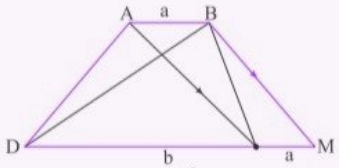
ابتدا مثلث BMD را با معلومات سه ضلع، رسم می‌کنیم. سپس از B پاره‌خط BA را به طول a به موازات MD (و در جهت M به D) رسم می‌کنیم تا نقطهٔ A به دست آید. در انتها از A خطی به موازات BM رسم می‌کنیم تا DM را در C قطع کند. سه گام آن زیر رسم شده است.



گام اول



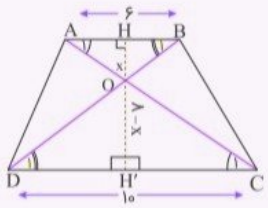
گام دوم



گام سوم

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۶ ارتفاع ذوزنقه را رسم می‌کنیم. حال داریم:



$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D$$

$$\Rightarrow (\text{نسبت ارتفاع‌ها}) = (\text{نسبت تشابه}) \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۸ - x} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۵x = ۲۴ - ۳x \Rightarrow ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$

$$S_{O\overset{\Delta}{A}B} = \frac{۱}{۲}(AB)(OH) = \frac{۱}{۲}(۶)(۳) = ۹$$

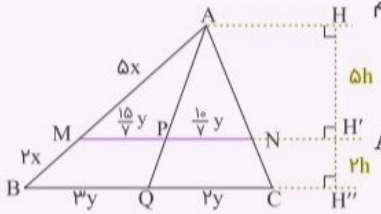
$$S_{O\overset{\Delta}{C}D} = \frac{۱}{۲}(DC)(OH') = \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸ - ۳) = ۲۵$$

$$S_{O\overset{\Delta}{B}C} = S_{B\overset{\Delta}{D}C} - S_{O\overset{\Delta}{C}D} = \frac{۱}{۲}(DC)(HH') - ۲۵$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸) - ۲۵ = ۴۰ - ۲۵ = ۱۵$$

به روش مشابه : $S_{O\overset{\Delta}{A}D} = S_{O\overset{\Delta}{B}C} = ۱۵$

۷ فرض می‌کنیم $AM = ۵x$، $MB = ۲x$، $BQ = ۳y$ و $QC = ۲y$. ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم. حال طبق قضیهٔ تالس، $\frac{HH'}{H'H''} = \frac{۵}{۲}$ و داریم:



$$\overset{\Delta}{ABQ} : MP \parallel BQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BQ} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MP}{۳y} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow MP = \frac{۱۵}{۷}y$$

$$\overset{\Delta}{AQC} : PN \parallel QC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PN}{QC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{PN}{۲y} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow PN = \frac{۱۰}{۷}y$$

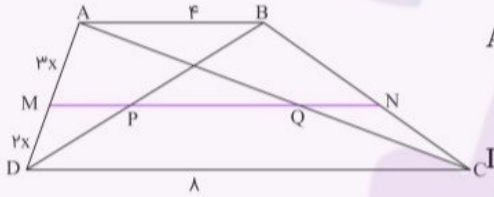
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۵}{۷}y)(۵h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{۱۵}{۴۹}, \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{APN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱۰}{۷}y)(۵h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{۱۰}{۴۹}$$

چهارضلعی‌های $MBQP$ و $NCQP$ ذوزنقه‌اند، بنابراین:

$$\frac{S_{MBQP}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۳y + \frac{۱۵}{۷}y)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{\frac{۳۶}{۷} \times ۲}{۵ \times ۷} = \frac{۷۲}{۲۴۵}$$

$$\frac{S_{NCQP}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲y + \frac{۱۰}{۷}y)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۵y)(۷h)} = \frac{\frac{۲۴}{۷} \times ۲}{۵ \times ۷} = \frac{۴۸}{۲۴۵}$$

۸ روش اول:

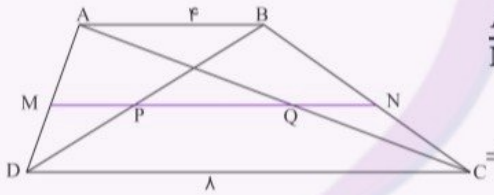


$$\overset{\Delta}{ADC} : MQ \parallel DC \Rightarrow \frac{MQ}{\underbrace{DC}_{۸}} = \frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow MQ = \frac{۲۴}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{DAB} : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{\underbrace{AB}_{۴}} = \frac{DM}{DA} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow MP = \frac{۸}{۵}$$

$$PQ = MQ - MP = \frac{۲۴}{۵} - \frac{۸}{۵} = \frac{۱۶}{۵}$$

روش دوم: می‌دانیم اگر MN با قاعده‌ها موازی باشد و $\frac{AM}{MD} = \frac{m}{n}$، آنگاه $PQ = \frac{m.DC - n.AB}{m+n}$. حال داریم:



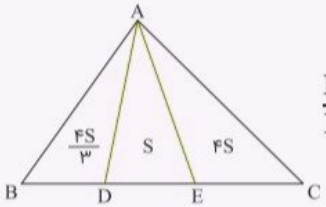
$$\frac{AM}{MD} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow m = ۳, n = ۲$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{۳ \times \overbrace{DC}^{۸} - ۲ \times \overbrace{AB}^{۴}}{۳ + ۲} = \frac{۱۶}{۵}$$

۹ اگر در یک مثلث، میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.
مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و فقط اگر میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن باشد.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۰



$$\frac{DE}{BD} = ? \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times DE}{\frac{۱}{۲}AH \times BD} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{\frac{S}{۴}}{\frac{۳}{۴}S} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{BC}{DE} = ? \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times BC \times AH}{\frac{۱}{۲} \times DE \times AH} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{\frac{۱۹}{۳}S}{S} = \frac{۱۹}{۳}$$

$$\frac{۴S}{۱} + \frac{S}{۱} + \frac{۴S}{۳} = \frac{۱۲S + ۳S + ۴S}{۳} = \frac{۱۹S}{۳}$$

۱۱

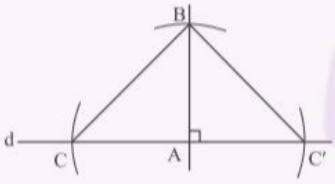
۱ـ نقطه A را بر روی خط d در نظر گرفته و از آن خطی عمود می‌کنیم.

۲ـ به مرکز A و شعاع ۲cm کمانی می‌زنیم تا خط عمود را در نقطه B قطع کند.

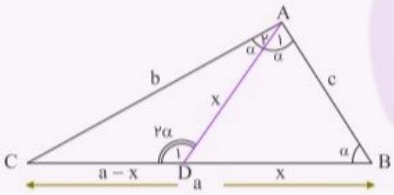
۳ـ به مرکز B و شعاع ۴cm کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه C و C' قطع کند.

هر یک از مثلث‌های ABC و ABC' جواب‌های مسئله هستند.

.



۱۲ فرض کنیم $\hat{A} = ۲\alpha$ و $\hat{B} = \alpha$. با رسم نیمساز $\hat{A}$، داریم:



$$D\overset{\Delta}{A}B : \hat{B} = \hat{A}_۱ \Rightarrow DB = DA = x \Rightarrow CD = a - x$$

$\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی $D\overset{\Delta}{A}B$ است:

$$\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} = ۲\alpha$$

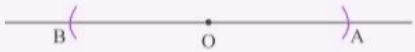
$$\left.\begin{matrix}\hat{D}_۱ = \hat{A} \\ \hat{A}_۲ = \hat{B}\end{matrix}\right\} \Rightarrow D\overset{\Delta}{A}C \underset{(\text{زز})}{\sim} A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-x}{b} = \frac{x}{c} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{b}{a} = \frac{a-x+x}{b+c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b+c}$$

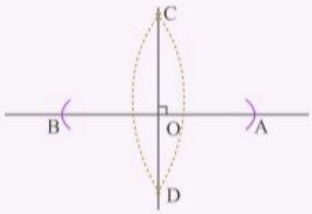
$$\Rightarrow a^۲ = b(b+c)$$

۱۳ الف) ابتدا خطی راست با خط‌کش رسم می‌کنیم:

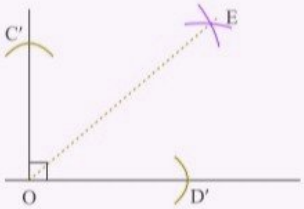
ب) سپس سوزن پرگار را روی خط قرار داده و آن نقطه را O می‌نامیم و دو کمان در دو طرف خط زده، بنابراین پاره‌خط AB تشکیل می‌شود.



پ) حال عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده که برای رسم آن ابتدا دو کمان با اندازهٔ برابر از نقطهٔ A و B زده و محل برخورد دو کمان را به یکدیگر وصل می‌کنیم. اکنون زاویهٔ $A\hat{O}C$ برابر ۹۰° خواهد بود.

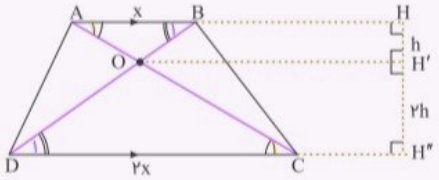


ت) حال نیمساز زاویهٔ AOC را رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا پرگار را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی بر خط OA و OC می‌زنیم.
سپس کمان را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و کمانی از D' و C' زده و محل برخورد آن دو کمان را E می‌نامیم.
پس از آن خط OE را رسم می‌کنیم که همان نیمساز زاویهٔ AOC است. بنابراین $E\hat{O}A$ برابر ۴۵° می‌باشد.



پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۴ روش اول: مطابق شکل، با رسم ارتفاع ذوزنقه، داریم:



$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$$

$$\Rightarrow O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow (\text{نسبت ارتفاع‌ها}) = (\text{نسبت تشابه})$$

$$\Rightarrow \frac{HH'}{H'H''} = \frac{AB}{DC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow HH' = h, H'H'' = ۲h$$

$$\frac{S_{O\overset{\Delta}{A}B}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}AB \times HH'}{\frac{۱}{۲}(AB + DC)(HH'')} = \frac{\frac{۱}{۲}(x)(h)}{\frac{۱}{۲}(۳x)(۳h)} = \frac{۱}{۹}$$

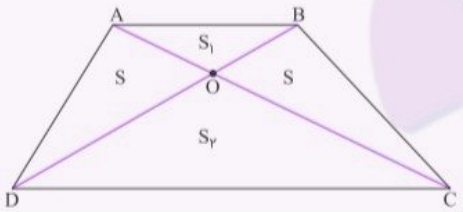
$$\frac{S_{O\overset{\Delta}{C}D}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DC \times H'H''}{\frac{۱}{۲}(AB + DC)(HH'')} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲x)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۳x)(۳h)} = \frac{۴}{۹}$$

$$\frac{S_{O\overset{\Delta}{A}D}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{A\overset{\Delta}{D}C} - S_{O\overset{\Delta}{D}C}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲x)(۳h) - \frac{۱}{۲}(۲x)(۲h)}{\frac{۱}{۲}(۲x + x)(۳h)} = \frac{xh}{\frac{۹}{۲}xh} = \frac{۲}{۹}$$

به روش مشابه : $S_{O\overset{\Delta}{B}C} = S_{O\overset{\Delta}{A}D} \Rightarrow \frac{S_{O\overset{\Delta}{B}C}}{S_{ABCD}} = \frac{۲}{۹}$

روش دوم:

نکته: در ذوزنقه با رسم قطرها داریم:

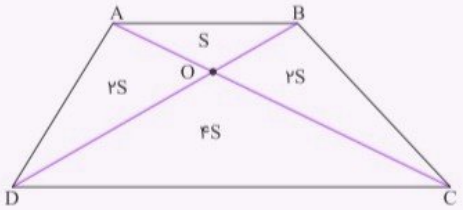


۱) $S_{O\overset{\Delta}{A}D} = S_{O\overset{\Delta}{B}C} = S$

۲) $S_۱S_۲ = S^۲$

۳) $S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲}\right)^۲$

دیدیم که مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها، $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین:

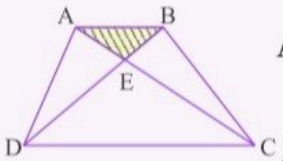


$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{OCD}}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAB}} = S, S_{\overset{\triangle}{OCD}} = ۴S$$

نکته فوق : $S^{۲}_{\overset{\triangle}{OAD}} = S_{\overset{\triangle}{OAB}} \times S_{\overset{\triangle}{OCD}} = ۴S^{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAD}} = S_{\overset{\triangle}{OBC}} = ۲S$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{ABCD}} = \frac{S}{۹S} = \frac{۱}{۹}, \frac{S_{\overset{\triangle}{OCD}}}{S_{ABCD}} = \frac{۴S}{۹S} = \frac{۴}{۹}, \frac{S_{\overset{\triangle}{OAD}}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{OBC}}}{S_{ABCD}} = \frac{۲}{۹}$$

۱۵ محل برخورد قطرها را E می‌نامیم:



$$\overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{DCE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{DCE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABE}}} = ۳^{۲} = ۹$$

همچنین $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{ABE}$ مثلث‌هایی هم‌ارتفاع هستند؛ پس نسبت مساحتشان برابر نسبت قاعده‌شان است.

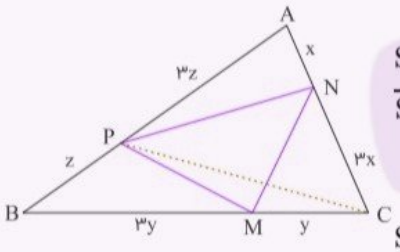
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABE}}} = \frac{DE}{BE} = ۳$$

همین‌طور برای $\overset{\triangle}{BCE}$ داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BCE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABE}}} = ۳$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{ABE}} + S_{\overset{\triangle}{BCE}} + S_{\overset{\triangle}{ADE}} + S_{\overset{\triangle}{DCE}} = ۱۶S_{\overset{\triangle}{ABE}}$$

۱۶ P را به C وصل می‌کنیم. در دو مثلث PNA و PNC، ارتفاع وارد بر AN و NC یکسان است، پس:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{PNA}}}{S_{\overset{\triangle}{PNC}}} = \frac{NA}{NC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{PNA}} = S, S_{\overset{\triangle}{PNC}} = ۳S$$

در دو مثلث CPA و CPB ارتفاع وارد بر PA و PB یکسان است، پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{CPA}}}{S_{\overset{\triangle}{CPB}}} = \frac{PA}{PB} = ۳ \Rightarrow \frac{۴S}{S_{\overset{\triangle}{CPB}}} = ۳ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{CPB}} = \frac{۴}{۳}S$$

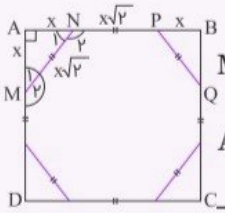
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{APN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{S}{S + ۳S + \frac{۴}{۳}S} = \frac{S}{\frac{۱۶}{۳}S} = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{APN}} = \frac{۳}{۱۶}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

به روش مشابه : $S_{\overset{\triangle}{BPM}} = S_{\overset{\triangle}{CMN}} = S_{\overset{\triangle}{APN}} = \frac{۳}{۱۶}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$

$$S_{\overset{\triangle}{PMN}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - (S_{\overset{\triangle}{APN}} + S_{\overset{\triangle}{BPM}} + S_{\overset{\triangle}{CMN}}) = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - \frac{۹}{۱۶}S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۷}{۱۶}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۷ اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی هشت ضلعی منتظم، برابر $\frac{۱۸۰^\circ\,(۸-۲)}{۸} = ۱۳۵^\circ$ است، پس $\hat{M}_۲ = \hat{N}_۲ = ۱۳۵^\circ$ و داریم:



$$\hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{AMN} : \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ \Rightarrow AM = AN = x$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} MN^۲ = x^۲ + x^۲ = ۲x^۲ \Rightarrow MN = x\sqrt{۲} \xrightarrow{NP=MN} NP = x\sqrt{۲}$$

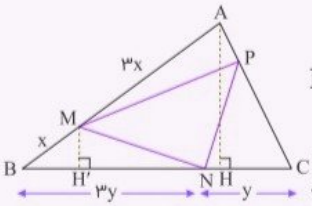
$$AB = ۴ \Rightarrow x + x\sqrt{۲} + x = ۴ \Rightarrow x\left(۲+\sqrt{۲}\right) = ۴$$

$$\Rightarrow x = \frac{۴}{۲+\sqrt{۲}} = \frac{۴\left(۲-\sqrt{۲}\right)}{\left(۲+\sqrt{۲}\right)\left(۲-\sqrt{۲}\right)} = ۲\left(۲-\sqrt{۲}\right)$$

$$\xrightarrow{MN=x\sqrt{۲}} MN = ۲\sqrt{۲}\left(۲-\sqrt{۲}\right) = ۴\sqrt{۲} - ۴ = ۴\left(\sqrt{۲}-۱\right)$$

۱۸ از A و M بر BC عمود می‌کنیم:

حال داریم:



$$\overset{\Delta}{BAH} : MH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH} = \frac{BM}{BA} = \frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}BN \times MH'}{\frac{۱}{۲}BC \times AH} = \left(\frac{BN}{BC}\right)\left(\frac{MH'}{AH}\right) \overset{(*)}{=} \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۳}{۱۶}$$

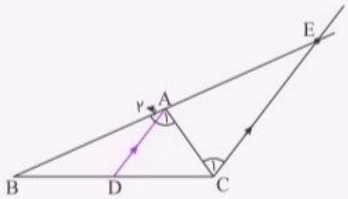
به روش مشابه:

$$S_{\overset{\Delta}{AMP}} = S_{\overset{\Delta}{CNP}} = S_{\overset{\Delta}{BMN}} = \frac{۳}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - \left(S_{\overset{\Delta}{AMP}} + S_{\overset{\Delta}{BMN}} + S_{\overset{\Delta}{CNP}}\right) = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - \frac{۹}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۷}{۱۶}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۷}{۱۶}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۹ از C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند. حال داریم:



$$DA \parallel CE \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{E}\ ,\ \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{E} = \widehat{C}_۱$$

$$\overset{\Delta}{ACE} : \widehat{E} = \widehat{C}_۱ \Rightarrow AE = AC\ (*)$$

$$\overset{\Delta}{BCE} : DA \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \xrightarrow{(*)} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

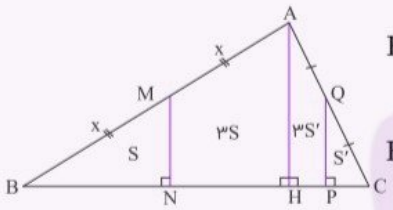
اگر قرار دهیم $AC = b$، $AB = c$ و $BC = a$، به کمک رابطهٔ فوق، طول BD و DC را می‌یابیم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{\underbrace{BD + DC}_{a}} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

۲۰ با رسم ارتفاع AH، داریم:



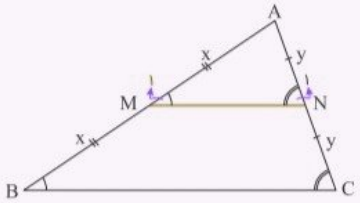
$$\hat{B} = \hat{B}, \hat{N} = \hat{H}_۱ \Rightarrow \overset{\Delta}{BNM} \sim \overset{\Delta}{BHA} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{BNM}}}{S_{\overset{\Delta}{BHA}}} = \left(\frac{BM}{BA}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\overset{\Delta}{BNM} = S \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BHA}} = ۴S \Rightarrow S_{AMNH} = ۳S$$

به روش مشابه $\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{CPQ}} = S', S_{\overset{\Delta}{CHA}} = ۴S' \Rightarrow S_{AQPH} = ۳S'$

$$\frac{S_{AMNPQ}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۳S + ۳S'}{۴S + ۴S'} = \frac{۳(S + S')}{۴(S + S')} = \frac{۳}{۴}$$

۲۱



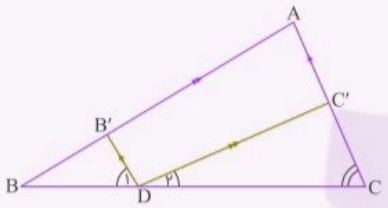
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۱\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN \parallel BC \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{B}, \hat{N}_۱=\hat{C} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}N \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\ (*)$$

$$S_{A\overset{\Delta}{M}N}=S\xrightarrow{(*)}S_{A\overset{\Delta}{B}C}=۴S \Rightarrow S_{MNCB}=۴S-S=۳S \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{M}N}}{S_{MNCB}}=\frac{S}{۳S}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲

طبق فرض، چهار ضلعی $AB'DC'$ متوازی‌الاضلاع است. درنتیجه $AC'=DB'\ ,\ AB'=DC'$. ضمناً طبق قضیه موازی- مورب، $\hat{D}_۱=\hat{C}$ و $\hat{D}_۲=\hat{B}$. حال داریم:



$$A\overset{\Delta}{B}C\ :\ AB>AC \Rightarrow \hat{C}>\hat{B}\xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}_۱}\hat{D}_۱>\hat{B}$$

$$B\overset{\Delta}{B'}D\ :\ \hat{D}_۱>\hat{B} \Rightarrow BB'>DB'\xrightarrow{+AB'}\underbrace{BB'+AB'}_{AB}>DB'+\underbrace{AB'}_{DC'}$$

$$\Rightarrow AB>DB'+DC'\ \ (*)$$

$$\hat{C}>\hat{B}\xrightarrow{\hat{B}=\hat{D}_۲}\hat{C}>\hat{D}_۲ \Rightarrow DC'>CC'$$

$$\xrightarrow{+DB'}DB'+DC'>\underbrace{DB'}_{AC'}+CC' \Rightarrow DB'+DC'>AC\ \ (**)$$

$$(*)\,,\,(**) \Rightarrow AC<DB'+DC'<AB$$

۲۳

مقدار کسرهای اولیه را k فرض می‌کنیم. طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

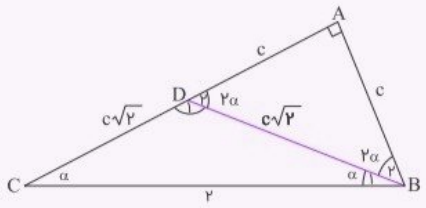
$$\frac{x}{a^۲}=\frac{y}{b^۲}=\frac{z}{c^۲}=k \Rightarrow \begin{cases} x=ka^۲, y=kb^۲, z=kc^۲ \\ \dfrac{x+y+z}{a^۲+b^۲+c^۲}=k\ (*) \end{cases}$$

$$\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{a+b+c}=\frac{\frac{ka^۲}{a}+\frac{kb^۲}{b}+\frac{kc^۲}{c}}{a+b+c}=\frac{k(a+b+c)}{a+b+c}=k\ (**)$$

$$(*)\,,\,(**)\ \Rightarrow \frac{x+y+z}{a^۲+b^۲+c^۲}=\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{a+b+c}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۴ فرض کنیم $\hat{C} = \alpha$ و $\hat{B} = ۳\alpha$. زاویهٔ B را به دو زاویهٔ α و ۲α تقسیم می‌کنیم. مطابق شکل:



$\overset{\Delta}{DBC}$ است $\hat{D}_۲$ زاویهٔ خارجی $\Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۲\alpha$

$\overset{\Delta}{ADB} : \hat{D}_۲ = \hat{B}_۲ \Rightarrow AD = AB = c$

$\overset{\Delta}{ADB}$: فیثاغورس $\Rightarrow DB^۲ = c^۲ + c^۲ = ۲c^۲ \Rightarrow DB = c\sqrt{۲}$

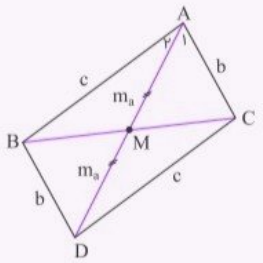
$\overset{\Delta}{DCB} : \hat{C} = \hat{B}_۱ \Rightarrow DC = DB = c\sqrt{۲} \Rightarrow AC = c + c\sqrt{۲} = c\left(۱ + \sqrt{۲}\right) \quad (*)$

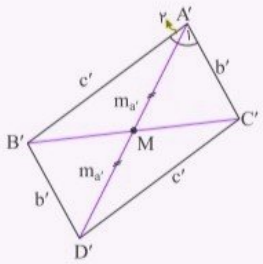
$\overset{\Delta}{ABD}$: فیثاغورس $\Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow c^۲ + c^۲\left(۱ + \sqrt{۲}\right)^۲ = ۲^۲$

$$\Rightarrow c^۲ + c^۲\left(۳ + ۲\sqrt{۲}\right) = ۴ \Rightarrow c^۲\left(۱ + ۳ + ۲\sqrt{۲}\right) = ۴ \Rightarrow c^۲ = \frac{۴}{۴ + ۲\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۲ + \sqrt{۲}} = \frac{۲\left(۲ - \sqrt{۲}\right)}{\left(۲ + \sqrt{۲}\right)\left(۲ - \sqrt{۲}\right)} = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow c = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۲۵ اضلاع مثلث $A'B'C'$ را a'، b' و c' و میانهٔ وارد بر $B'C'$ را $m_{a'}$ می‌نامیم، پس طبق فرض، $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m_a}{m_{a'}}$. حال میانه‌ها را به اندازهٔ خودشان امتداد داده و نقطهٔ حاصل را به دو رأس دیگر وصل می‌کنیم.





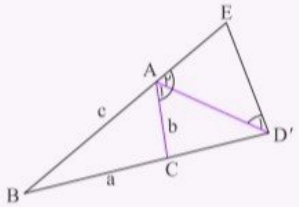
در چهار ضلعی‌های حاصل، قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس این چهار ضلعی‌ها متوازی‌الاضلاع‌اند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \sim \overset{\Delta}{A'C'D'} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ \text{به روش مشابه} : \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{A'B'D'} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}'_1 + \hat{A}'_2 \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \ \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۲۶ از D' خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند:



حال داریم:

$$CA \parallel D'E \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D'}_1 \xrightarrow{\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2} \widehat{A}_2 = \widehat{D'}_1$$

$$\overset{\Delta}{AED'} : \widehat{A}_2 = \widehat{D'}_1 \Rightarrow AE = D'E \ (*)$$

$$\overset{\Delta}{BD'E} : CA \parallel D'E \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{CA}{D'E} \xrightarrow{(*)} \frac{BA}{BE} = \frac{CA}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AE} \xrightarrow{\frac{BE}{AE} = \frac{D'B}{D'C}} \frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C}$$

حال با قرار دادن $AC = b$، $AB = c$ و $BC = a$، طول $D'B$ و $D'C$ را می‌یابیم:

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{D'B - D'C}{D'C} = \frac{c-b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{D'C} = \frac{c-b}{b} \Rightarrow D'C = \frac{ab}{|c-b|}$$

به روش مشابه:

$$D'B = \frac{ac}{|c-b|}$$

۲۷ فرض کنیم $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$، حال داریم:

$$a = bk \xrightarrow{\times a} a^2 = abk$$

$$b = ck \xrightarrow{\times b} b^2 = bck$$

$$c = dk \xrightarrow{\times c} c^2 = cdk$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + cd} = \frac{abk + bck + cdk}{ab + bc + cd} = \frac{k(ab + bc + cd)}{(ab + bc + cd)} = k \ (*)$$

$$\frac{ab + bc + cd}{b^2 + c^2 + d^2} = \frac{(bk)b + (ck)c + (dk)d}{b^2 + c^2 + d^2} = \frac{(b^2 + c^2 + d^2)k}{(b^2 + c^2 + d^2)} = k \ (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + cd} = \frac{ab + bc + cd}{b^2 + c^2 + d^2}$$

۲۸

با فرض : $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = k \Rightarrow x = ky \, , \, a = kb$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + a^2p^2}}{\sqrt{y^2 + b^2p^2}} = \frac{\sqrt{k^2y^2 + k^2b^2p^2}}{\sqrt{y^2 + b^2p^2}} = \sqrt{\frac{k^2(y^2 + b^2p^2)}{(y^2 + b^2p^2)}} = \sqrt{k^2} \xrightarrow{k>0} k$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۹

$$\begin{cases} A + E_۱ = ۱۸۰ \\ E_۱ + E_۲ = ۱۸۰ \end{cases} \Rightarrow \cancel{E_۱} + A = \cancel{E_۱} + E_۲$$

$$ABC \sim BDE \Rightarrow \begin{cases} A = E_۲ \\ B = B \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EB}$$

$$\frac{۱۲}{۴} = \frac{۴ + x}{۳} \Rightarrow x = ۵$$

۳۰

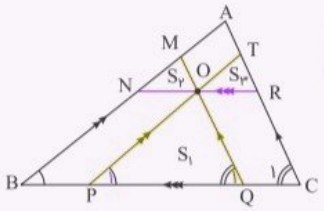
$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۲۱}{x} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۲}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۸\sqrt{۲}}{۷} = \frac{P'}{P} = \frac{\text{محیط بزرگ‌تر}}{\text{محیط کوچک‌تر}}$$

۳۱



$$\left.\begin{array}{l} PO \parallel BA \Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{B} \\ QO \parallel CA \Rightarrow \hat{Q}_۱ = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{P}Q \sim A\overset{\Delta}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S} = \left(\frac{PQ}{BC}\right)^۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}} = \frac{PQ}{BC} \quad (I)$$

به روش مشابه $\Rightarrow M\overset{\Delta}{N}O \sim A\overset{\Delta}{B}C$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} = \frac{ON}{BC} \xrightarrow{\text{متوازی‌الاضلاع است } OPBN} \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} = \frac{PB}{BC} \quad (II)$$

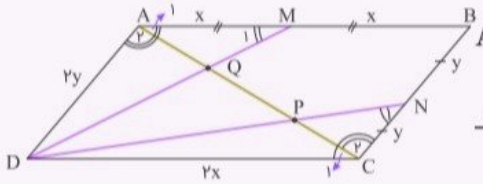
به روش مشابه $\Rightarrow \frac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}} = \frac{QC}{BC} \quad (III)$

$$\xrightarrow{(I),(II),(III)} \frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}} = \frac{\overbrace{PQ + PB + QC}^{BC}}{BC} = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳} = \sqrt{S} \Rightarrow \left(\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳}\right)^۲ = S$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۲ طول اضلاع متوازی‌الاضلاع را ۲x و ۲y فرض می‌کنیم. حال داریم:



$$AM \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{M}_۱ = Q\hat{D}C \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}Q \underset{(zz)}{\sim} C\overset{\Delta}{D}Q \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{DC} =$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AQ}{AQ+QC} = \frac{۱}{۱+۲} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow AQ = \frac{۱}{۳}AC \quad (*)$$

$$CN \parallel DA \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{A}_۲, \hat{N}_۱ = P\hat{D}A \Rightarrow C\overset{\Delta}{N}P \underset{(zz)}{\sim} A\overset{\Delta}{D}P \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{CN}{AD} =$$

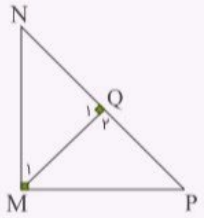
$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CP}{CP+PA} = \frac{۱}{۱+۲} \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow CP = \frac{۱}{۳}AC \quad (**)$$

$$QP = AC - AQ - CP \xrightarrow{(*),(**)} QP = AC - \frac{۱}{۳}AC - \frac{۱}{۳}AC = \frac{۱}{۳}AC$$

$$\Rightarrow AQ = QP = PC = \frac{۱}{۳}AC$$

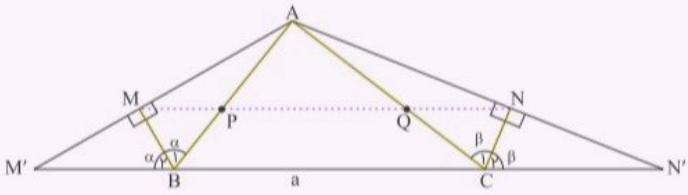
۳۳

$$\begin{cases} Q_۱ = Q_۲ \\ P = M_۱ \end{cases} \xrightarrow{zz} MNQ \sim MQP \Rightarrow \frac{MN}{PM} = \underbrace{\frac{QN}{QM} = \frac{QM}{QP}}_{QM^۲ = QN \times QP}$$



۳۴

الف AM و AN را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در M' و N' قطع کند. حال داریم:



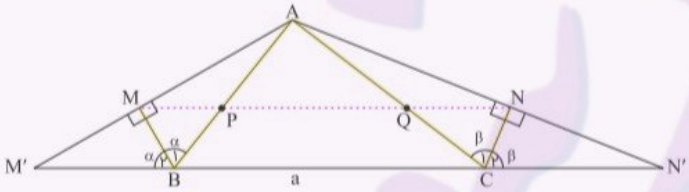
$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \\ BM = BM \\ A\hat{M}B = M'\hat{M}B = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\Delta}{M}B \cong M'\overset{\Delta}{M}B \Rightarrow AM = MM', AB = BM'$$

به روش مشابه:

$$\Rightarrow AN = NN', AC = CN'$$

$$A\overset{\Delta}{M'}N' : \frac{AM}{MM'} = \frac{AN}{NN'} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel M'N' \Rightarrow MN \parallel BC$$

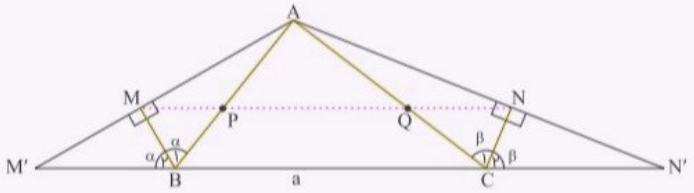
ب



$$A\overset{\Delta}{B}M' : MP \parallel M'B \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MM'} = ۱ \Rightarrow AP = PB$$

درنتیجه P وسط AB است و به روش مشابه Q وسط AC است.

پ

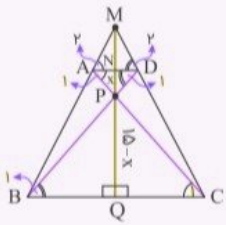


$$MN \parallel M'N' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\underbrace{M'B}_{AB} + BC + \underbrace{CN'}_{AC}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MN = \frac{۱}{۲}\left(\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) \text{ محیط}\right)$$

۳۵ نکته: می‌دانیم در هر ذوزنقه، محل برخورد قطرها و محل برخورد امتداد ساق‌ها روی خطی است که وسط‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه را به هم وصل می‌کند.

حال چون این ذوزنقه، متساوی‌الساقین است، این خط بر قاعده‌ها عمود است و داریم:



$$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow P\overset{\Delta}{A}D \sim P\overset{\Delta}{C}B$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{PQ} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۵ - x} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۵ - x \Rightarrow ۴x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

$$AD \parallel BC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}, \hat{D}_۲ = \hat{C} \Rightarrow M\overset{\Delta}{A}D \sim M\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{MN}{MQ} = \frac{AD}{BC}$$

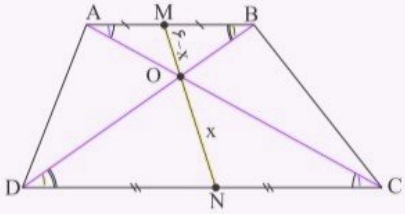
$$\Rightarrow \frac{MN}{MN + NQ} = \frac{۴}{۱۲} \Rightarrow \frac{MN}{MN + ۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳MN = MN + ۱۵ \Rightarrow ۲MN = ۱۵ \Rightarrow MN = \frac{۱۵}{۲}$$

$$MP = MN + NP = \frac{۱۵}{۲} + \frac{۱۵}{۴} = \frac{۴۵}{۴}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ نکته: می‌دانیم در هر ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند از محل برخورد قطرها می‌گذرد.
حال با فرض $ON = x$، داریم:



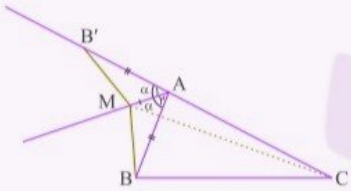
$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱, \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow (\text{نسبت میانه‌ها}) = (\text{نسبت تشابه})$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{۶ - x}{x} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۱۸ - ۳x \Rightarrow ۴x = ۱۸ \Rightarrow x = \frac{۱۸}{۴} = \frac{۹}{۲}$$

۳۷ نقطه B' را روی امتداد CA چنان انتخاب می‌کنیم که $AB' = AB$. حال داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB' = AB \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AM = AM \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMB'} \cong \overset{\Delta}{AMB}$$

$$\Rightarrow MB' = MB \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{MB'C} : \text{نامساوی مثلثی} \Rightarrow MB' + MC > B'C$$

$$\xrightarrow{(*)} MB + MC > AB' + AC$$

$$\xrightarrow{AB'=AB} MB + MC > AB + AC$$

$$\xrightarrow{+BC} MB + MC + BC > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow (\overset{\Delta}{MBC}) \text{ محیط } > (\overset{\Delta}{ABC}) \text{ محیط}$$

۳۸

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\times ۲}{۲\times ۲}=\frac{۲a}{۴}\\ \frac{b\times ۳}{۳\times ۳}=\frac{۳b}{۹}\\ \frac{c\times ۴}{۴\times ۴}=\frac{۴c}{۱۶}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲a}{۴}+\frac{۳b}{۹}+\frac{۴c}{۱۶}=\frac{۲a+۳b+۴c}{۲۹}=\frac{a}{۲}\ (*)$$

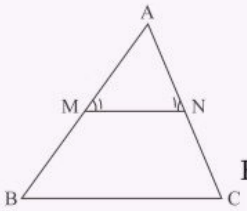
$$۲a+۳b+۴c=\frac{۲۹a}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a\times ۵}{۲\times ۵}=\frac{۵a}{۱۰}\\ \frac{b\times(-۴)}{۳\times(-۴)}=\frac{-۴b}{-۱۲}\\ \frac{c\times ۳}{۴\times ۳}=\frac{۳c}{۱۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۵a}{۱۰}+\frac{-۴b}{-۱۲}+\frac{۳c}{۱۲}=\frac{۵a-۴b+۳c}{۱۰}=\frac{a}{۲}\ (**)$$

$$۵a-۴b+۳c=\frac{۱۰a}{۲}$$

$$\frac{۲a+۳b+۴c}{۵a-۴b+۳c}=\frac{\frac{۲۹a}{۲}}{\frac{۱۰a}{۲}}=\frac{۲۹}{۱۰}$$

۳۹



$$BC||MN\Rightarrow\begin{cases}M_۱=B\\ N_۱=C\end{cases}\xrightarrow{زز} AMN\sim ABC$$

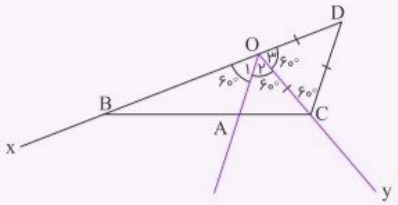
$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{AMN}+\underbrace{\cancel{S_{MNCB}}}_{۱۵\,S_{AMN}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{S_{AMN}}}{۱۶\cancel{S_{AMN}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^۲\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{AB-AM}=\frac{۱}{۴-۱}\Rightarrow\frac{MB}{AM}=۳$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۰ از C خطی به موازات AO رسم می‌کنیم تا امتداد Ox را در نقطهٔ D قطع کند:



حال داریم:

$$OA \parallel DC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_{۲} = ۶۰^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_{۳}=۶۰^\circ} \widehat{D} = ۶۰^\circ$$

پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است و $OC = CD = OD$. حال داریم:

$$\overset{\Delta}{BCD} : AO \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{DC} = \frac{OB}{BD} \ (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{OA}{OB} = \frac{DC}{BD} \xrightarrow{OD=DC} \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{BD} \ (**)$$

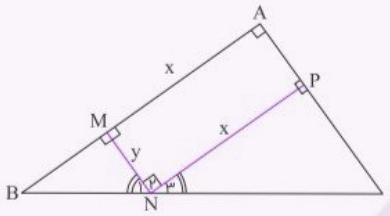
$$\xrightarrow{(*),(**)} \frac{OA}{OC} + \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BD} + \frac{OD}{BD} = \frac{BD}{BD} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times \frac{۱}{OA}} \frac{۱}{OC} + \frac{۱}{OB} = \frac{۱}{OA}$$

۴۱

$$\left.\begin{array}{l} BC||DE \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD} \\ BE||DF \Rightarrow \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC \times AF$$

۴۲ طول و عرض مستطیل را x و y فرض می‌کنیم. حال داریم:



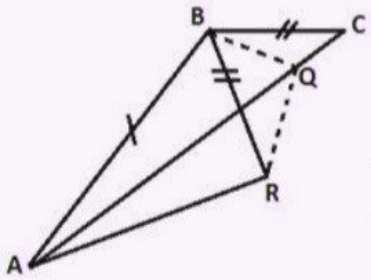
$$(AB||PN) \ , \ (\text{مورب}\ BC) \Rightarrow \hat{N}_{۳} = \hat{B}$$

$$\hat{N}_{۳} = \hat{B} \ , \ \hat{P} = \hat{M} \Rightarrow P\overset{\Delta}{N}C \underset{(\text{زز})}{\sim} M\overset{\Delta}{B}N$$

$$\Rightarrow \frac{PN}{MB} = \frac{PC}{MN} \Rightarrow \frac{x}{MB} = \frac{PC}{y} \Rightarrow MB.PC = xy = S_{AMNP}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۳ (قضیه لولا) برهان: چون $A\hat{B}C > D\hat{E}F$، از B پاره‌خط BR را طوری رسم می‌کنیم که $A\hat{B}R = D\hat{E}F$ و $BR = EF$ باشد. اگر AR را رسم کنیم، چون $\overset{\triangle}{ABR} \cong \overset{\triangle}{DEF}$ (ض ز ض) بنابراین $AR = DF$. از طرفی $BC = EF$ پس $BC = BR$ حال نیمساز زاویه $R\hat{B}C$ را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه Q قطع کند. با رسم QR چون $\overset{\triangle}{BQR} \cong \overset{\triangle}{BQC}$ (ض ز ض) پس $QR = QC$.

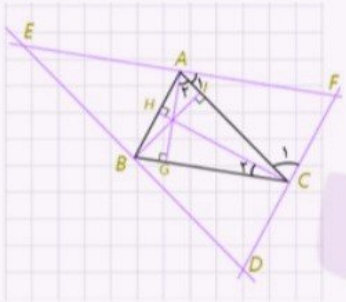


حال می‌توان نوشت:

$$\overset{\triangle}{AQR} \xrightarrow{\text{قضیه نامساوی مثلث}} AQ + QR > AR \xrightarrow[AR=DF]{QR=QC} AQ + QC > DF$$

$$\Rightarrow \ AC > DF$$

۴۴ مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید.



چهار ضلعی ABCF متوازی‌الاضلاع است زیرا $AF||BC$ و $AB||FC$ است، بنابراین: $BC = AF$ (۱)

چهار ضلعی ACBE متوازی‌الاضلاع است زیرا $AE||BC$ و $BE||AC$؛ بنابراین: $BC = EA$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $AF = EA$؛ بنابراین نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.

$$\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC||EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \perp EF$$

لذا خط AG، عمودمنصف پاره‌خط EF است.

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

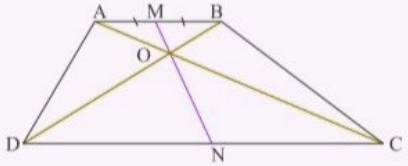
پاره‌خط BI، عمودمنصف پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، عمودمنصف پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث EFD هستند و درنتیجه همرس‌اند.

۴۵ ابتدا ثابت می‌کنیم وسط‌های قاعده‌ها و محل برخورد قطرها، روی یک خط قرار دارند.

محل برخورد قطرها را O و وسط AB را M می‌نامیم. OM را امتداد می‌دهیم تا CD را در N قطع کند. حال داریم:

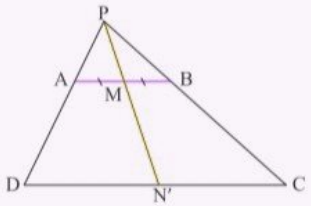


$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}M \sim O\overset{\Delta}{C}N \Rightarrow \dfrac{AM}{NC} = \dfrac{OA}{OC} \\ O\overset{\Delta}{B}M \sim O\overset{\Delta}{D}N \Rightarrow \dfrac{BM}{DN} = \dfrac{OB}{OD} \\ O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{NC} = \frac{BM}{DN} \xrightarrow{AM=BM} NC = DN$$

بنابراین وسط‌های قاعده‌ها و محل برخورد قطرها، روی یک خط قرار دارند. (*)

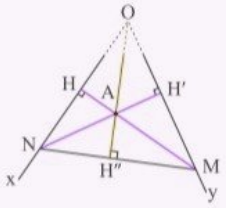
حال ثابت می‌کنیم محل برخورد امتداد ساق‌ها و وسط‌های قاعده‌ها، روی یک خط قرار دارند:

محل برخورد ساق‌ها را P نامیده و به M (وسط AB) وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا DC را در N' قطع کند. حال داریم:



$$\left.\begin{array}{l} P\overset{\Delta}{D}N' : AM \parallel DN' \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{AM}{DN'} = \dfrac{PM}{PN'} \\ P\overset{\Delta}{N'}C : MB \parallel N'C \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \dfrac{MB}{N'C} = \dfrac{PM}{PN'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{DN'} = \frac{MB}{N'C}$$

$$\xrightarrow{AM=MB} DN' = N'C \Rightarrow \text{وسط } DC \text{ است } N'$$

پس وسط‌های قاعده‌ها و محل برخورد امتداد ساق‌ها، روی یک خط قرار دارند. پس با استفاده از این نتیجه و (*)، نتیجه می‌شود که وسط‌های قاعده‌ها، محل برخورد امتداد ساق‌ها و محل برخورد قطرها، روی یک خط قرار دارند.

۴۶ مطابق شکل، از نقطهٔ A عمودهایی بر اضلاع زاویه رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع دیگر زاویه را در M و N قطع کنند. حال اگر نقطهٔ فرضی O، رأس زاویه باشد، آنگاه MH و NH' دو ارتفاع از مثلث OMN و نقطهٔ A، محل همرسی ارتفاع‌های آن است. پس کافی است از A خطی بر MN عمود کنیم تا ارتفاع سوم این مثلث که از O می‌گذرد، به دست آید.